Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις Τετάρτη 2 Σεπτεμβρίου 2020

Να επιλεγούν οι σωστές απαντήσεις και να αιτιολογηθούν.
(A: ο Αριθμός Μητρώου σας [$*$]: ακέραιο μέρος)

1. Για την εξίσωση $y''(x) + y(x) = 2sinx, x \in \mathbf{R}$:

A) Για κάθε λύση ισχύει $y(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

B) Υπάρχει φραγμένη λύση.

C) Όλες οι λύσεις είναι ταλαντούμενες στο $\mathbf{R}^+$.

D) Όλες οι λύσεις είναι φραγμένες. E) Κανένα από τα προηγούμενα.

2. Για την εξίσωση $y'(t) + sin^2(t)y(t) = \begin{cases} 6-2t, & t \in [0,3] \\ 0, & t > 3 \end{cases}$, ισχύει ότι:

A) Δεν έχει λύση με $y(2020) = A$.

B) Όλες οι λύσεις τείνουν στο μηδέν για $t \to +\infty$.

C) Υπάρχουν ταλαντούμενες λύσεις.

D) Όλες οι λύσεις είναι τελικά σταθερές. E) Κανένα από τα προηγούμενα.

3. Για το σύστημα $\begin{array}{ll} y_1'(t) = ay_1(t) + by_2(t) + P_1(t), & t \geq 0 \\ y_2'(t) = ky_1(t) - ay_2(t) + P_2((t), & t \geq 0 \end{array}$ με P_1, P_2 πολυώνυμα βαθμών $A, 2020$, αντίστοιχα, και $a, b, k \in \mathbf{R}, a \neq 0, bk > 0$ ισχύει ότι:

A) Όλες οι λύσεις (y_1, y_2) είναι πολυωνυμικής μορφής (:y_1, y_2 πολυώνυμα).

B) Υπάρχει τουλάχιστον μια λύση πολυωνυμικής μορφής.

C) Είναι δυνατόν να υπάρχουν φραγμένες λύσεις.

D) Δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν ταλαντούμενες λύσεις. E) Κανένα από τα προηγούμενα.

4. Για την εξίσωση: $y^{(n)})(x) + y^{(n-1)}(x) + ... + y'(x) + y(x) = 0, \quad t \geq 0$ με $n = [\frac{A}{100}]$, ισχύει ότι:

A) Όλες οι λύσεις τείνουν στο μηδέν για $x \to +\infty$.

B) Υπάρχει μη ταλαντούμενη λύση.

C) Υπάρχουν μη φραγμένες λύσεις.

D) Όλες οι λύσεις είναι φραγμένες. E) Κανένα από τα προηγούμενα.

5. Αν $y_1, y_2, \quad t \geq 0$ είναι δύο λύσεις μιας ομογενούς γ.δ.ε. $n-$τάξης (E_0) με $y_1(x)y_2(x) \neq 0, (\frac{y_1}{y_2})'(x) \neq 0, x \in I$, ισχύει ότι:

A) Η εξίσωση (E_0) μπορεί πάντα να υποβιβαστεί σε μια ομογενή γ.δ.ε. $(n-2)$ τάξης.

B) Η εξίσωση (E_0) μπορεί να υποβιβαστεί σε μια ομογενή γ.δ.ε. $(n-2)$ τάξης μόνον για $n = 3$.

C) Αν οι y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες τότε η εξίσωση (E_0) μπορεί να υποβιβαστεί σε μια ομογενή γ.δ.ε. $(n-2)$ τάξης.

D) Τα δεδομένα δεν αρκούν για τον υποβιβασμό της (E_0) σε εξίσωση $(n-2)$ τάξης.

E) Κανένα από τα προηγούμενα.

6. Αν $S = \{y_i(x) = x^i, x \in I = [0, \infty), (i = 1, \ldots, A,)\}$, τότε ισχύει ότι:

A) Οι συναρτήσεις $y_i, (i = 1, \ldots, A,)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I και υπάρχει ομογενής γ.δ.ε. A-τάξης ορισμένη στο I και τέτοια ώστε το S να είναι βασικό της σύνολο λύσεων.

B) Υπάρχει ομογενής γ.δ.ε. $A-1$-τάξης της οποίας το S είναι βασικό σύνολο λύσεων.

C) Υπάρχει ομογενής γ.δ.ε. $A+1$-τάξης της οποίας το S περιέχεται σε κάποι βασικό σύνολο λύσεων.

D) Είναι $W(y_1, \ldots, y_A)(0) = 0$ και συνεπώς οι συναρτήσεις $y_i, (i = 1, \ldots, A,)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες.

E) Κανένα από τα προηγούμενα.

7. Για την εξίσωση: $x^2y'' + 3xy' + \lambda y = 0, x \geq 1$ με $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει ότι:

A) Υπάρχει ακριβώς μία λύση με $y(A) = 0 = y'(A)$.

B) Το σύνολο των λύσεων με $y(1) = 0 = y(\infty)$ είναι μη κενό και πεπερασμένο.

C) Υπάρχει μη μηδενική λύση με $y(1) = 0 = y(e)$.

D) Όλες οι λύσεις είναι φραγμένες. E) Κανένα από τα προηγούμενα.

8. Για την εξίσωση $y'(x) - (5x^4 + 1)y(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2+3}, x \geq 0$, και την συνάρτηση f με τύπο $f(x) := -\int_x^{+\infty} \frac{\sin^2(s)}{s^2+3} e^{\int_s^x (5u^4+1)du} ds, x \geq 0$, ισχύει ότι:

A) Η συνάρτηση f δεν είναι λύση της εξίσωσης.

B) Η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη και μη φραγμένη.

C) Η εξίσωση δεν έχει φραγμένες λύσεις.

D) Η συνάρτηση f είναι μια φραγμένη λύση της εξίσωσης.

E) Η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ταλαντούμενη λύση.

F) Κανένα από τα προηγούμενα

9. Για την εξίσωση: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ισχύει ότι:

A) Αν $\frac{M_y - N_x}{yN - xM} := \phi(xy)$ τότε η συνάρτηση $\Phi(xy)$ όπου $\Phi(v) = e^{\int \phi(v)dv}$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της εξίσωσης.

B) Η εξίσωση $(xy^3 + 2x^2y^2 - y^2) + (x^2y^2 + 2x^3y - 2x^2)y' = 0$ έχει ολοκληρωτικό παράγοντα.

C) Υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της εξίσωσης της μορφής $x^k y^m e^{\lambda xy}, k, m, \lambda \in \mathbf{R}$.

E) Κανένα από τα προηγούμενα

Να δοθούν απαντήσεις στα θέματα $1-7$ και σε ένα από τα $8-9$.